A Theory of Type Polymorphism in Programming(3) ∼∼ 概要 ∼∼

児玉靖司
東京理科大学理工学部情報科学科

4 Well-Typing アルゴリズムとその正当性

- この節では，prefixed expression の well typing を見つけるという問いに挑戦する．アルゴリズム $\mathcal{W}$ を提案する．
- $\mathcal{W}$ の文法的健全性と，完全性を示す．
- 健全性のためには $\mathcal{W}$ が成功するときは，いつも wt. 完全性のためには，wt が存在するときは，いつも $\mathcal{W}$ が，少なくとも一つ見つけることができる．
- $\mathcal{W}$ は，(多分) 完全であるが簡単な証明は難しい．本論文では，健全性に絞る．
- $\mathcal{W}$ をシミュレートする型チェックアルゴリズムは，LCF メタ言語 ML として，2 年間成功している．その有用性が証明されている．
- W は，Robinson の単一化アルゴリズムを基にしている．$\mathcal{W}$ の完全性の証明では，以下の命題の 第二の部分を必要とするが，健全性の証明では，第一の性質を必要とするのみである．

  命題 5(Robinson)

  式のペア σ と τ に対して，以下を満たす置換 S を生ずるアルゴリズム $\mathcal{U}$ がある．

  1. もし $\mathcal{U}(\sigma,\tau)$ が成功したとすると，U は σ と τ を単一化する (i.e., $U\sigma = U\tau$).
  2. もし R が σ と τ を単一化すると，$\mathcal{U}(\sigma,\tau)$ が成功し，ある置換 U を生成することができる (ある置換 S に対して $R = SU$ が成立).

  さらに，U は σ と τ にある変数を含むのみである．

- プログラム f の well typing を見つけるためには，型付けされた prefix $\bar{p}$ を仮定しなければならない．
- $\mathcal{W}$ は，$\bar{p}|\bar{f}$ が wt である $\bar{f}$ を生ずると期待する．
- $\mathcal{W}$ は，置換 T を返し，必要な変換を示す．正確には，もし，$\mathcal{W}(\bar{p}, f)$ が成功したとすると，$(T, \bar{f})$ を返し，$(T\bar{p})|\bar{f}$ は wt である，とする．
- previously に出現しなかった型変数を必要とする．そのような型変数を β によって表わし，β_i とする．
- $\mathcal{W}(\bar{p}, f)$ を f に関して帰納的に定義する．
- 後でより効率的なアルゴリズム $\mathcal{J}$ を紹介する．

  アルゴリズム $\mathcal{W}$

  $$\mathcal{W}(\bar{p}, f) = (T, \bar{f})$$

  以下を満たす.

  1. もし f が x の場合，

4.1 $\mathcal{W}$ の健全性

- $\mathcal{W}$ が健全であることを示すために便利で簡単な定義をする．
- もし A が型で，型付けされた prefix または 型付けされた pe がある時，

  $$\mathrm{Vars}(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha | \alpha \in A, \alpha \text{は型変数である}\}.$$

  もし A が型づけされた prefix または，型付けされた pe ならば，

  $$\mathrm{Gen}(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha | \alpha \in A, \alpha \text{は generic な型変数}\}.$$

  $$\mathrm{Spec}(A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Vars}(A) - \mathrm{Gen}(A).$$

  もし S が置換で，

  $$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(S) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha | S \text{ は} \alpha \text{を含む}\} \\ &= \{\alpha | \exists \beta \cdot S\beta \neq \beta \text{かつ} \alpha \in \{\beta\} \cup \mathrm{Vars}(S\beta)\} \end{aligned}$$

- 以下の簡単な性質を証明することができる (証明は省略).

  命題 6

  1. $\mathrm{Inv}(RS) \subseteq \mathrm{Inv}(R) \cup \mathrm{Inv}(S)$
  2. $\mathrm{Vars}(S\tau) \subseteq \mathrm{Vars}(\tau) \cup \mathrm{Inv}(S)$.

  定理 2(文法的健全性)

  $\bar{p}$ を standard な prefix とし，$p|f$ を閉じた pe とする．その時，もし $\mathcal{W}(\bar{p}, f) = (T, \bar{f}_\tau)$ ならば，

1. (A) $T\bar{p}|\bar{f}_\tau$ は wt.
2. (B) $\mathrm{Inv}(T) \subseteq \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup New$,
3. (C) $\mathrm{Vars}(\tau) \subseteq \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup New$

ここで New とは $\mathcal{W}$ で使われる新しい型変数の集合を示す.

証明

wt の再帰的な定義を使って f の構造による帰納法で証明する．条件式の場合と fix の場合は省略する．

1. (i) f が x の場合．$T = I$ より (B) は，すぐにわかる．もし λx_σ または $fix\,x_\sigma$ が $\bar{p}$ の中で active な時，$\bar{f} = x_\sigma$ かつ (A)，(C) がわかる．もし $let\,x_\sigma$ が active ならば $\tau = [\beta_i/\alpha_i]\sigma$，$\{\alpha_i\}$ は σ で generic，$New = \{\beta_i\}$ として $\bar{f} = x_\tau$ である．そのため $T\bar{p}|\bar{f} = \bar{p}|x_\tau$ は standard で，(A)，(C) も簡単に証明できる．
2. (iv) f が $(\lambda x \cdot d)$ の場合．$(R, \bar{d}_\rho) = \mathcal{W}(\bar{p}\cdot\lambda x_\beta, d)$ とする．新しい型変数として，New を使う．帰納法より $R(\bar{p}\cdot\lambda x_\beta)|\bar{d}_\rho$ が wt である．よって (A) $f = R\bar{p}|(\lambda x_{R\beta}\cdot \bar{d})_{R\beta\to\rho}$ が wt(wt の定義より)．また，帰納法より

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{Inv}(R)\\ \mathrm{Vars}(\rho)\end{array}\right\} \begin{array}{cl} \subseteq & \mathrm{Spec}(\bar{p}\cdot\lambda x_\beta) \cup New_1 \\ = & \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup \{\beta\} \cup New_1 \\ = & \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup New \\ & (New = New_1 \cup \{\beta\} \text{ より}) \end{array}$$

   かつ，$T = R$ より (B) がいえる．(C) のためには，

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vars}(R\beta \to \rho) & \subseteq & \mathrm{Inv(R)} \cup \{\beta\} \cup \mathrm{Vars}(\rho) \\ & & (\text{命題 6 より，上より}) \\ & \subseteq & \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup New \end{array}$$

3. (vi) f が $(letx = dine)$ の場合．$(R, \bar{d}_\rho) = \mathcal{W}(\bar{p}, d)$ とする．新しい型変数として New_1 を使う．帰納法の仮定より，

$$R\bar{p}|\bar{d} \text{は}\ wt \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{Inv}(R)\\ \mathrm{Vars}(\rho)\end{array}\right\} \subseteq \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup New_1 \tag{2}$$

   (2) と命題 6 より，

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}(R\bar{p}) & \subseteq & \mathrm{Inv}(R) \cup \mathrm{Spec}(\bar{p}) \\ & \subseteq & \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup New_1 \end{array} \tag{3}$$

   (1) の standardness より，

$$\mathrm{Gen}(R\bar{p}|\bar{d}) \cap \mathrm{Spec}(R\bar{p}) = . \tag{4}$$

   また，$\mathrm{Gen}(R\bar{p}) = \mathrm{Gen}(\bar{p})$ を得，(2) より $\mathrm{Vars}(\rho)$ と 独立である．よって，$R\bar{p}\cdot let\,x_\sigma$ は standard prefix である．
   そのため $(S, \bar{e}_\sigma) = \mathcal{W}(R\bar{p}\cdot let\,x_\sigma, e)$，新しい型変数を New_2 とする．帰納法より，

$$S(R\bar{p}\cdot let\,x_\rho)|\bar{e} \text{ は wt} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{Inv}(S)\\ \mathrm{Vars}(\sigma)\end{array}\right\} \subseteq \mathrm{Spec}(R\bar{p}\cdot let\,x_\sigma) \cup New_2 \tag{6}$$

   しかし，$\mathrm{Spec}(R\bar{p}\cdot let\,x_\rho) = \mathrm{Spec}(R\bar{p})$ なので (6) と (4) いっしょに生ずる (New_2 は，新しい型変数より)．

$$\mathrm{Inv}(S) \cap \mathrm{Gen}(R\bar{p}|\bar{d}) = \tag{7}$$

   かつ (1) と命題 4 より $S(R\bar{p}|\bar{d})$ は wt，そして (5) を使い，wt の定義より，

$$SR\bar{p}|(let\ x_{S\rho}\ =\ S\bar{d}\ in\ \bar{e})_\sigma$$

   が wt. しかし，これは $T\bar{p}|\bar{f}$ の形をしているので (A) が証明したことになる．(B) のためには，

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Inv}(T) & \subseteq & \mathrm{Inv}(S) \cup \mathrm{Inv}(R) & \text{命題 6 より} \\ & \subseteq & \mathrm{Spec}(\bar{p}) \cup New_1 \cup New_2 & \text{(6) と (2) を使う} \end{array}$$

   そして (C) のためには，同じような理由により ((6) より)，この場合は，$New = New_1 \cup New_2$ より必要とする結果である．
4. (ii) f が (de) の場合.